

Nullstellen von Polynomen vierten Grades

(quartische Gleichung)

Ausgangspunkt: $p(x) = x^4 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (*)$

$b \neq 0$, sonst: biquadratische Gleichung, Substitution $z = x^2$

$c \neq 0$, sonst: $x_1 = 0$ und kubische Gleichung

Ansatz: $p(x) = (x^2 + \frac{A}{2}x + y - \frac{b}{A})(x^2 - \frac{A}{2}x + y + \frac{b}{A})$

A, y unbekannt

ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich:

$$p(x) = x^4 + (2y - \frac{A^2}{4})x^2 + bx + y^2 - \frac{b^2}{A^2}$$
$$\Rightarrow a = 2y - \frac{A^2}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow c = y^2 - \frac{b^2}{A^2} \quad (2)$$

$$\text{aus (1)} \Rightarrow A^2 = 4(2y - a)$$

einsetzen in (2) und umformen:

$$y^2 - \frac{b^2}{4(2y-a)} = c$$
$$\Rightarrow 4y^2(2y-a) - 4c(2y-a) - b^2 = 0$$
$$\Rightarrow 8y^3 - 4ay^2 - 8cy + 4ac - b^2 = 0$$
$$\Rightarrow y^3 - \frac{a}{2}y^2 - cy + \frac{4ac-b^2}{8} = 0 \quad (3)$$
$$\Rightarrow \text{kubische Resolvente}$$

(3) lösen: benötigt wird eine beliebige reelle Lösung (existiert immer)

$$\Rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow A = 2\sqrt{2y-a}$$

(gilt: $2y - a \leq 0 \Rightarrow (*)$ besitzt keine reellen Nullstellen)

$\Rightarrow$ 2 quadratische Gleichungen

$\Rightarrow$ maximal 4 Nullstellen

Beispiel:

zunächst:

$$\begin{aligned}p(x) &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 1 \\p'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 8x + 1 \\p''(x) &= 12x^2 - 24x + 8 \\p'''(x) &= 24x - 24 = 0 \Rightarrow x_s = 1 \\p''(1) &= -4 \\p'(1) &= 1 \\p(1) &= 1 \\\Rightarrow p(x) &= (x-1)^4 - \frac{4}{2}(x-1)^2 + (x-1) + 1\end{aligned}$$

setze: $x := x - 1 \Rightarrow$ Rücksubstitution $x := x + 1$ (am Ende)

$$\begin{aligned}\Rightarrow p(x) &= x^4 - 2x^2 + x + 1 \\\Rightarrow a &= -2 \\\Rightarrow b = c &= 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ kubische Resolvente:

$$\begin{aligned}p(y) &= y^3 + y^2 - y - \frac{a}{8} = 0 \\p'(y) &= 3y^2 + 2y - 1 \\p''(y) &= 6y + 2 = 0 \Rightarrow y_s = -\frac{1}{3} \\p'(-\frac{1}{3}) &= -\frac{4}{3} = p \\p(-\frac{1}{3}) &= -\frac{155}{216} = q \\\Rightarrow z^3 - \frac{4}{3}z - \frac{155}{216} &= 0 \\z = y - y_s &= y + \frac{1}{3} \quad (y = z - \frac{1}{3}) \\D = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 &= 0,04094328704 > 0 \\w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} &= 0,8248163766 \\z = w - \frac{p}{3} \frac{1}{w} &= 1,363656847 \\\Rightarrow A = 2\sqrt{2y + 2} &= 4,030209438\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1) \quad x^2 + \frac{A}{2}x + y - \frac{b}{A} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2,015104719x + 0,7821974512 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 1,490216121$$

$$\Rightarrow x_2 = -0,5248885993$$

$$2) \quad x^2 - \frac{A}{2}x + y + \frac{b}{A} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2,015104719x + 1,278449577 = 0$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = 1,00755236 \pm \sqrt{-0,2632878189} \notin R$$

$$\text{endgültig: } x_1 = x_1 + 1 = -0,490216121$$

$$x_2 = x_2 + 1 = 0,4751114007$$